**Лекция №7.**

**Интегральные уравнения с вырожденным ядром.**

Рассмотрим класс интегральных уравнений Фредгольма 2 рода, которые эквивалентным образом сводятся к решению системы линейных алгебраических уравнений.

 Ядро  называется вырожденным, если его можно представить в виде конечной суммы произведений двух функций, из которых одна зависит только от , а другая только от . Вырожденное ядро имеет вид

  (1)

Считаем, что функции  и ,  между собой линейно независимы и эти функции непрерывны на , тогда и ядро непрерывно в основном квадрате. Вообще, говоря функции  и ,  могут быть квадратично суммируемы на ,тогда ядро будет квадратично суммируемо в основном квадрате. Такие ядра тоже считаются вырожденными. В дальнейшем будем считать, что  и ,  непрерывны на  и ядро  непрерывно в основном квадрате.

 Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром и непрерывным свободным членом 

 

Обозначим

  (2)

Неизвестные числа, так как выражаются определенным интегралом от неизвестной функции.

Тогда решение можно записать в виде

  (3)

Очевидно, что решение интегрального уравнения сводится к нахождению  - постоянных 

**Замечание.** Числа  имеют смысл скалярных произведений

 .

Далее подставим (3) в (2)

 

 

 

Обозначим

 

 

Тогда

 , 

или

 , 

Получили систему линейных алгебраических уравнений эквивалентную интегральному уравнению.

 Эту систему уравнений можно получить по -другому. Для каждого 

умножим (3) на  и проинтегрируем по  от  до .

**Пример 1.**

 ****

 ****

 **, **

 ****

 ****

Получаем систему

   , .

 .

**Пример 2.**

 ****

 ****

 ****

 ****

 ****, 

 .

**Пример 3.**

 

 

  

 

 

 

 

 

Получили тождество, тогда

  

тогда

 

Нет единственности.

**Пирмер 4.**

 ****

 ****

 ** **

 ****

 ****

 ****

 ****

 ****

Решения нет.

Другой способ решения, решим этот пример методом последовательных приближений.

  

 

   

Отсюда следует, что последовательность решений, полученных методом последовательных приближений расходится. Рассмотрим эту последовательность.

 

 

 

 

и т.д.

 

 

Следовательно, последовательность функций

 

Расходится.