**Лекция №7.**

**Интегральные уравнения с вырожденным ядром.**

Рассмотрим класс интегральных уравнений Фредгольма 2 рода, которые эквивалентным образом сводятся к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Ядро  называется вырожденным, если его можно представить в виде конечной суммы произведений двух функций, из которых одна зависит только от , а другая только от . Вырожденное ядро имеет вид

 (1)

Считаем, что функции  и ,  между собой линейно независимы и эти функции непрерывны на , тогда и ядро непрерывно в основном квадрате. Вообще, говоря функции  и ,  могут быть квадратично суммируемы на ,тогда ядро будет квадратично суммируемо в основном квадрате. Такие ядра тоже считаются вырожденными. В дальнейшем будем считать, что  и ,  непрерывны на  и ядро  непрерывно в основном квадрате.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром и непрерывным свободным членом 



Обозначим

 (2)

Неизвестные числа, так как выражаются определенным интегралом от неизвестной функции.

Тогда решение можно записать в виде

 (3)

Очевидно, что решение интегрального уравнения сводится к нахождению  - постоянных 

**Замечание.** Числа  имеют смысл скалярных произведений

.

Далее подставим (3) в (2)







Обозначим





Тогда

, 

или

, 

Получили систему линейных алгебраических уравнений эквивалентную интегральному уравнению.

Эту систему уравнений можно получить по -другому. Для каждого 

умножим (3) на  и проинтегрируем по  от  до .

**Пример 1.**

****

****

**, **

****

****

Получаем систему

  , .

.

**Пример 2.**

****

****

****

****

****, 

.

**Пример 3.**





 











Получили тождество, тогда

 

тогда



Нет единственности.

**Пирмер 4.**

****

****

** **

****

****

****

****

****

Решения нет.

Другой способ решения, решим этот пример методом последовательных приближений.

 



  

Отсюда следует, что последовательность решений, полученных методом последовательных приближений расходится. Рассмотрим эту последовательность.









и т.д.





Следовательно, последовательность функций



Расходится.